1 Zahlen

1.1 Die Quadratwurzel

Die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$, wobei $a \geq 0$.
a heißt Radikand
Beachte: $\sqrt{0} = 0$
Ein Teil der Quadratwurzeln sind **rationale Zahlen** (bspw. $\sqrt{16}, \sqrt{0{,}09}, \sqrt{\frac{4}{9}}$), andere dagegen **irrationale Zahlen** (bspw. $\sqrt{2}, \sqrt{0{,}9}, \sqrt{\frac{7}{9}}$).

Die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ besteht aus allen rationalen und irrationalen Zahlen.

1.2 Rechnen mit Quadratwurzeln

- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $\quad a \geq 0$
- $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ $\quad a \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\quad a, b \geq 0$
- $\sqrt{a : b} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$ $\quad a \geq 0$ und $b > 0$
- **aber:** $\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ $\quad a, b \neq 0$

1.3 Teilweises Radizieren und „unter die Wurzel ziehen“

Zerlege den Radikanden in ein Produkt, so dass ein Faktor eine Quadratzahl ist.

Beispiele:

- $\sqrt{147} = \sqrt{49 \cdot 3} = 7\sqrt{3}$
- $\sqrt{x^5} = \sqrt{x^4 \cdot x} = x^2\sqrt{x}$ $\quad x \geq 0$

Ist bei einem Produkt ein Faktor eine Wurzel, so lässt sich das Produkt als Wurzel schreiben.

Beispiele:

- $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}$
- $x\sqrt{x^3 + 5} = \sqrt{x^2\left(x^3 + 5\right)}$
- $-5\sqrt{y+1} = -\sqrt{5^2\left(y+1\right)}$

1.4 Die n-te Wurzel

Definition: Die n-te Wurzel aus a ist die nicht negative Lösung der Gleichung $x^n = a$.
(Dabei muss $a \geq 0$ sein!)

$$\boxed{x = \sqrt[n]{a} \quad n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R}_0^+}$$

Potenzschreibweise der n-ten Wurzel: $\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$

Beispiel: $\sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 7^{\frac{6}{6}} = 7$

1.5 Potenzen mit rationalen Exponenten

Für **positive** Basis a gilt: $\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p}$ $(p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N})$

Rechnen mit n-ten Wurzeln durch Umformen in Potenzen:

Beispiel: $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$;

1.6 Die Binomischen Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(x^2+5)^2 = x^4 + 10x^2 + 25$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(0,5x - y)^2 = 0,25x^2 - xy + y^2$

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ $(0,3a + 6b)\cdot(0,3a - 6b) = 0,09a^2 - 36b^2$

1.7 Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$ nennt man **quadratische Gleichung**.

Sonderfälle

- $b = 0 \Leftrightarrow$ reinquadratische Gleichung
  In diesem Fall lässt sich die quadratische Gleichung in die Form $x^2 = d$ bringen.
  Dabei gilt: $L = \{\pm d\}$ für $d \geq 0$ und $L = \{\ \}$ für $d < 0$
  Beispiel: $2x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{5}$
- $c = 0$
  Durch Ausklammern lässt sich die quadratische Gleichung in die Form $x \cdot (ax + b) = 0$ bringen.
  Dann gilt: $L = \left\{0\ ;\ -\frac{b}{a}\right\}$
  Beispiel: $4x^2 - 11x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (4x - 11) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 2,75$

Allgemeiner Fall

- Anwendung der Lösungsformel
  Für die Lösungen der quadratischen Gleichung gilt: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
  Der Ausdruck $b^2 - 4ac$ wird als **Diskriminante D** bezeichnet.
  Falls $D > 0$ gibt es <u>genau zwei</u> Lösungen.
  Falls $D = 0$ gibt es <u>genau eine</u> Lösungen.
  Falls $D < 0$ gibt es keine Lösung.

Beispiel: $x^2 + 6x + 8 = 0$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 2}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = -4$$

Faktorisieren eines quadratischen Terms

Hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so gilt:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Beispiel: $x^2 + 6x + 8 = (x + 2) \cdot (x + 4)$

2 Funktionen

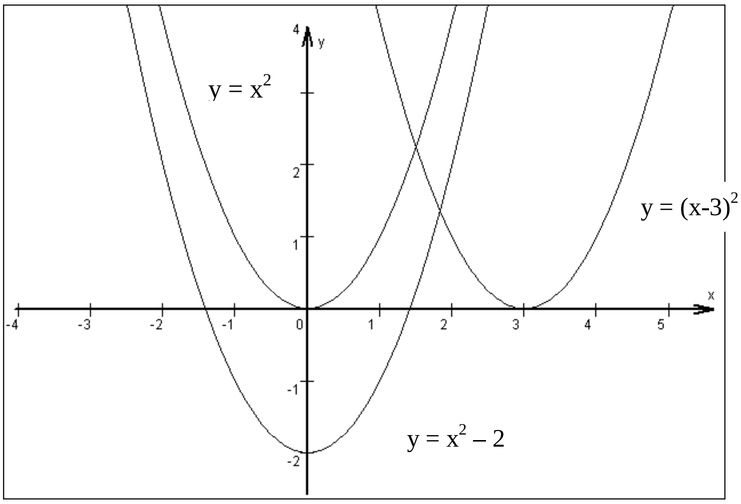
2.1 Quadratische Funktionen

Der Graph der Funktion $x \mapsto y$ mit

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \quad (a \neq 0,\ x \in \mathbb{R})$$

heißt **Parabel**.

$y = x^2$ ist die Gleichung der **Quadratfunktion**.



2.2 Scheitelgleichung

Die Gleichung

$$\boxed{y = a \cdot (x - s_1)^2 + s_2} \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

nennt man **Scheitelgleichung** einer Parabel.

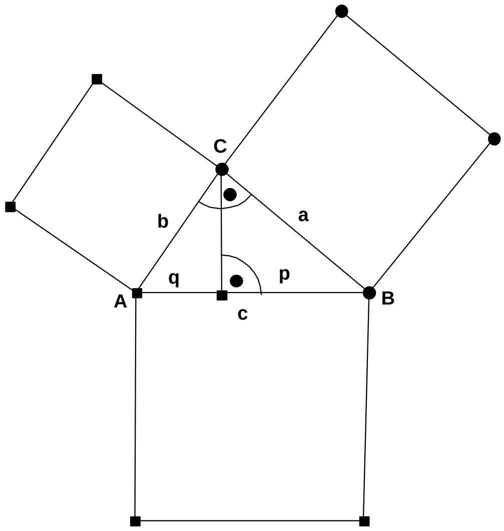
- **Scheitel** $S(s_1 | s_2)$
- **Wertemenge**
  $a > 0 \Rightarrow W = [s_2; \infty[$ Parabel nach oben geöffnet
  $a < 0 \Rightarrow W =]-\infty; s_2]$ Parabel nach unten geöffnet

Für $a = +1$ oder $a = -1$ ist die Parabel eine **Normalparabel**.
Für $0 < |a| < 1$ ist die Parabel breiter als die Normalparabel.
Für $|a| > 1$ ist sie schlanker als die Normalparabel.

3 Geometrie

3.1 Die Satzgruppe des Pythagoras

Satz des Pythagoras:
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse flächengleich der Summe der Quadrate über den Katheten.



$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Auch die Umkehrung ist richtig:
Wenn in einem Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist es rechtwinklig.

Höhensatz:
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$

Kathetensatz
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist jedes Kathetenquadrat flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$$\boxed{a^2 = c \cdot p \quad \text{und} \quad b^2 = c \cdot q}$$

Damit gilt:
- Die Diagonale eines Quadrates hat die Länge $a \cdot \sqrt{2}$
- Die Höhe im gleichseitigen Dreieck hat die Länge $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

3.2 Sinus, Kosinus und Tangens

Im rechtwinkligen Dreieck ($0^o < \alpha < 90^o$) wird definiert:

Sinus: $$\boxed{\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}}$$

Kosinus: $$\boxed{\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}}$$

Tangens: $$\boxed{\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}}$$

Außerdem gelten folgende Beziehungen:

$$\boxed{\sin(90^o - \alpha) = \cos\alpha} \qquad \boxed{\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha} \qquad \boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

und $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ mit $\sin^2\alpha := (\sin\alpha)^2$

Wichtige Sinus- Kosinus- und Tangenswerte

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

3.3 Die Pyramide

Die Pyramide hat ein Vieleck (hier: Viereck) als **Grundfläche**.

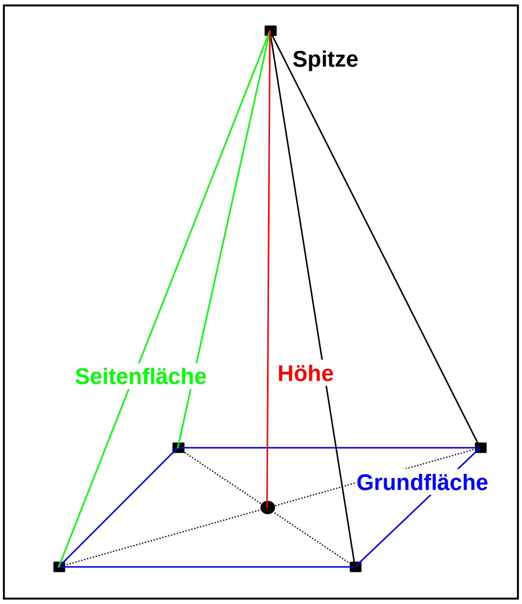
Die **Seitenflächen** sind Dreiecke.

Das Lot von der Spitze auf die Grundebene bezeichnet man als **Höhe**.

Eine Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h hat den **Rauminhalt**

$$\boxed{V = \tfrac{1}{3} G \cdot h}$$

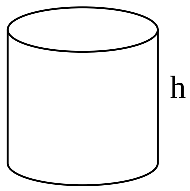
Eine dreiseitige Pyramide, deren Kanten alle gleich lang sind, heißt **Tetraeder**.



3.4 Zylinder und Kegel

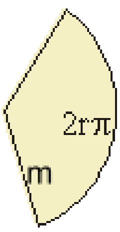
Zylinder: Volumen: $\boxed{V = Gh = r^2\pi h}$

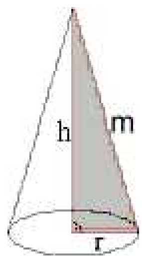
Mantelfläche: $\boxed{M = u_{Kreis} \cdot h = 2r\pi h}$



Kegel: Volumen: $\boxed{V = \tfrac{1}{3} Gh = \tfrac{1}{3} r^2 \pi h}$

Die Mantelfläche ist ein Kreissektor mit dem Radius *m* (Mantellinie) und der Bogenlänge $2r\pi$. Daraus lässt sich ableiten: $\boxed{M = r\pi m}$

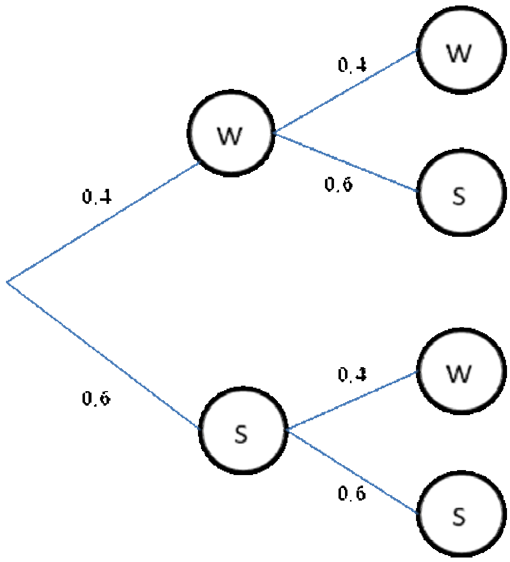




4 Stochastik

Mehrstufige Zufallsexperimente

In einer Urne befinden sich 4 weiße und 6 schwarze Kugeln. Man zieht zwei Kugeln mit Zurücklegen:



P(„ww“) = 0,4·0,4 = 0,16

P(„ws“) = 0,4·0,6 = 0,24

P(„sw“) = 0,6·0,4 = 0,24

P(„ss“) = 0,6·0,6 = 0,36

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einer Verzweigung ausgehen, ist immer 1.

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad zu diesem Ereignis.

2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten, die zu diesem Ereignis gehören.

Beispiel: P(„zwei gleichfarbige Kugeln“) = P(„ww“) + P(„ss“) = 0,16 + 0,36 = 0,52