1 Zahlen

Bruchterme sind zum Beispiel: $\frac{x+3}{x-2}$, $\frac{2a-b}{3a}$, $\frac{1}{3c+2d}$.

1.1 Erweitern und Kürzen

Ein Bruchterm wird erweitert (gekürzt), indem man Zähler und Nenner mit dem selben Term multipliziert (durch den selben Term dividiert).

Beispiel zum Kürzen:

In Faktoren zerlegen: $\frac{5a^2b+5ab^2}{10a^3+10a^2b} = \frac{5ab(a+b)}{10a^2(a+b)} =$

Gemeinsame Faktoren kürzen: $= \frac{b}{2a}$

1.2 Addieren, Subtrahieren

Beispiel $\frac{1}{a-b} - \frac{a+b}{a^2-ab} + \frac{b}{a^2} =$

Nenner faktorisieren: $a-b$; $a(a-b)$; $a\cdot a$

Hauptnenner (HN) bestimmen: HN: $a^2(a-b)$

Auf den HN erweitern: $= \frac{a^2}{a^2(a-b)} - \frac{(a+b)a}{a^2(a-b)} + \frac{b(a-b)}{a^2(a-b)} =$

Zähler zusammenfassen: $= \frac{a^2-a^2-ab+ab-b^2}{a^2(a-b)} = \frac{-b^2}{a^2(a-b)}$

1.3 Multiplizieren, Dividieren

Zwei Bruchterme werden multipliziert, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert: $\frac{z_1}{n_1}\cdot\frac{z_2}{n_2}=\frac{z_1\cdot z_2}{n_1\cdot n_2}$

Vor dem Ausmultiplizieren kürzen!

Durch einen Bruchterm wird dividiert, indem man mit seinem Kehrbruch multipliziert:

$\frac{z_1}{n_1}:\frac{z_2}{n_2}=\frac{z_1\cdot n_2}{n_1\cdot z_2}$

Das Ergebnis soweit wie möglich kürzen!

1.4 Lösen von Bruchgleichungen

Beispiel: Bestimme die Lösungsmenge in der Grundmenge $\mathbb{Q}$

$$\frac{x-5}{x^2+3x} - \frac{2}{x+3} = \frac{3}{2x+6}$$

Nenner faktorisieren: x(x+3) ; x+3 ; 2(x+3)

Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 0\}$

HN bestimmen: HN: 2x(x+3)

<u>Beide</u> Seiten mit dem HN multiplizieren:

$$\frac{(x-5)\cdot 2x(x+3)}{x^2+3x} - \frac{2\cdot 2x(x+3)}{x+3} = \frac{3\cdot 2x(x+3)}{2x+6}$$

Kürzen: $(x-5)\cdot 2 - 2\cdot 2x = 3x$

Nach x auflösen: $x = -2$

Prüfen, ob $x \in D$ $L = \{-2\}$

Eventuell Probe durchführen.

Auflösen von **Formeln** nach einer **Variablen**:

Beispiel: Löse die Formel nach g auf: $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad |\cdot fbg$ (Hauptnenner)

$$\frac{fbg}{f} = \frac{fbg}{b} + \frac{fbg}{g}$$

$$bg = fg + fb$$

$$bg - fg = fb$$

$$g(b-f) = fb$$

$$\boxed{g = \frac{fb}{b-f}}$$

1.5 Ungleichungen

Beim Lösen von Ungleichungen verfährt man im Wesentlichen wie beim Lösen von Gleichungen. Allerdings muss man zusätzlich beachten:

Beim Multiplizieren der Ungleichung mit negativen Zahlen und beim Dividieren durch negative Zahlen kehrt sich das Ungleichungszeichen um.

Beispiel: $7 - 3x < 8 \quad | -7$

$$-3x < 1 \quad | :(-3)$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

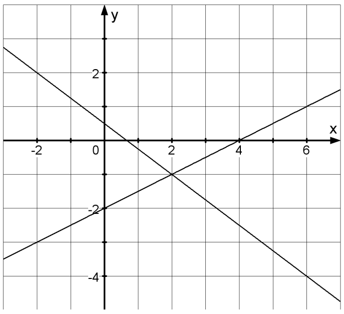
1.6 Lineare Gleichungssysteme

Beispiel:
I) $3x + 4y = 2$
II) $x - 2y = 4$

1.6.1 Graphische Lösung

Geraden zeichnen; der Schnittpunkt ist die Lösung.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I)} & y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \\ \text{II)} & y = \frac{1}{2}x - 2 \end{array}}$$



L = {(2/–1)}

Anzahl der Lösungen

Für die Anzahl der Lösungen eines linearen Gleichungssystems gibt es eine der drei Möglichkeiten:

- Genau eine Lösung (Die Geraden schneiden sich.)
- Keine Lösung (Die Geraden sind echt parallel.)
- Unendlich viele Lösungen (Die Geraden fallen zusammen.)

1.6.2 Rechenverfahren

Additionsverfahren

I) $3x + 4y = 2$
II) mit 2 multiplizieren — II´) $2x - 4y = 8$

I) + II´) $5x = 10$
$x = 2$

In I) einsetzen: $y = -1$

Lösungsmenge: L = {(2|–1)}

Einsetzungsverfahren

II) nach x auflösen: $x = 2y + 4$

In I) einsetzen: $3(2y + 4) + 4y = 2$
$10y + 12 = 2$
$y = -1$

In II) oder in I) einsetzen $x = 2$

Lösungsmenge: L = {(2|–1)}

1.7 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Definitionen für $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a^0 = 1$

Insbesondere gilt: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Beispiel: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Gleitkommadarstellung:

$26000000 = 2{,}6 \cdot 10^{7}$

$0{,}0000053 = 5{,}3 \cdot 10^{-6}$

Potenzgesetze:

Gleiche Basis	Gleiche Exponenten	Potenz einer Potenz
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $a^x : a^y = a^{x-y}$	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ $a^x : b^x = (a : b)^x$	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
$10^3 \cdot 10^5 = 10^8$	$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$	$(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$
Beachte die jeweiligen Definitionsmengen!		

Beispiel: $(s^2 : s^{-5})^{-3} = (s^{2-(-5)})^{-3} = (s^7)^{-3} = s^{-21} = \frac{1}{s^{21}}$

2 Funktionen

2.1 Zuordnungen

Bei einer Zuordnung wird jeder Zahl oder Größe eine weitere Zahl oder Größe zugeordnet.

Beschreibungsmöglichkeiten: Zuordnungsvorschrift, Wertetabelle, Graph

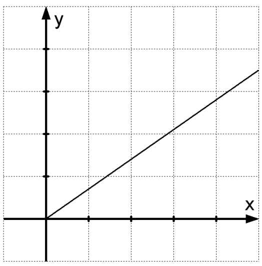
Eine Zuordnung $x \mapsto y$, die jedem x aus dem Definitionsbereich D genau ein y aus dem Wertebereich W zuordnet, heißt **Funktion**.

2.2 Direkte Proportionalität

Bei einer direkten Proportionalität wird dem doppelten, dreifachen, vierfachen ... Wert der einen Größe der doppelte, dreifache, vierfache ... Wert der anderen Größe zugeordnet.

Beispiel: Menge $\mapsto$ Preis

Erkennungszeichen: quotientengleiche Größenpaare



Der Graph ist eine vom Ursprung des Koordinaten-systems ausgehende **Halbgerade**.

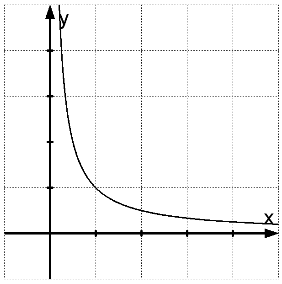
Dreisatz: vgl. Grundwissen 6. Klasse

2.3 Indirekte Proportionalität

Bei einer indirekten Proportionalität wird dem doppelten, dreifachen, vierfachen ... Wert der einen Größe die Hälfte, der dritte Teil, der vierte Teil ... der anderen Größe zugeordnet.

Beispiel: Bei gleicher Arbeit: Anzahl der Arbeiter $\mapsto$ Arbeitszeit

Der Graph ist eine **Hyperbel**.



Dreisatz

Beispiel: 6 Arbeiter schaffen den Ausbau einer Straße in 40 Stunden. Wie lange brauchen 5 Arbeiter?

1. 6 A. $\triangleq$ 40 h
2. 1 A. $\triangleq$ 40 h $\cdot$ 6 = 240 h
3. 5 A. $\triangleq$ 240 h : 5 = 48 h

2.4 Lineare Funktionen

$$f:\ x \mapsto mx + t \qquad \text{bzw.} \qquad y = mx + t \qquad \text{mit } D = \mathbb{Q}$$

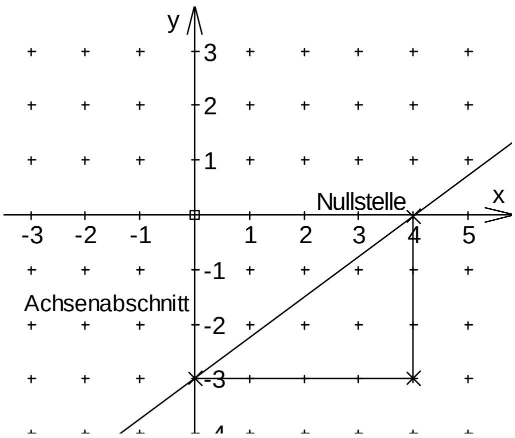
Der Graph ist eine Gerade mit der **Steigung** m und dem **y-Achsenabschnitt** t.

z.B.: $m = \frac{3}{4}$, $t = -3$

$f: x \mapsto \frac{3}{4}x - 3$ mit $D = \mathbb{Q}$

Man kann die Gerade mit Hilfe des Steigungs-dreiecks und des y-Achsenabschnitts zeichnen.

Nullstelle: $\frac{3}{4}x - 3 = 0 \ \Rightarrow\ x = 4$



Die allgemeine Geradengleichung y = mx + t

- Je größer $|m|$ ist, desto steiler ist die Gerade.
- Für m < 0 fällt die Gerade, für m > 0 steigt die Gerade.
- Alle Geraden mit gleicher Steigung m sind parallel.

2.5 Besondere Geraden

$y = mx$	Ursprungsgerade
$y = x$	Winkelhalbierende des I. und III Quadranten
$y = -x$	Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten
$y = a$	Parallele zur x-Achse durch $(0\|a)$ $(a \in \mathbb{Q})$
$x = a$	Parallele zur y-Achse durch $(a\|0)$ (ist nicht Graph einer Funktion)

2.6 Punkt auf Gerade

Ein Punkt liegt auf einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung erfüllen:

z.B. g: $y = -3x+5$, $P(2|-1)$

$P \in g$, denn $\mathbf{-1} = -3 \cdot \mathbf{2} + 5$

2.7 Gerade durch zwei Punkte

Beispiel: Gerade durch die Punkte $A(3|1)$ und $B(-2|4)$

Steigung: $m = \frac{1-4}{3-(-2)} = -\frac{3}{5}$ also: g: $y = -\frac{3}{5}x + t$

Weil $A \in g$ ist, muss gelten: $1 = -\frac{3}{5} \cdot 3 + t$

Daraus erhält man: $t = 2\frac{4}{5}$

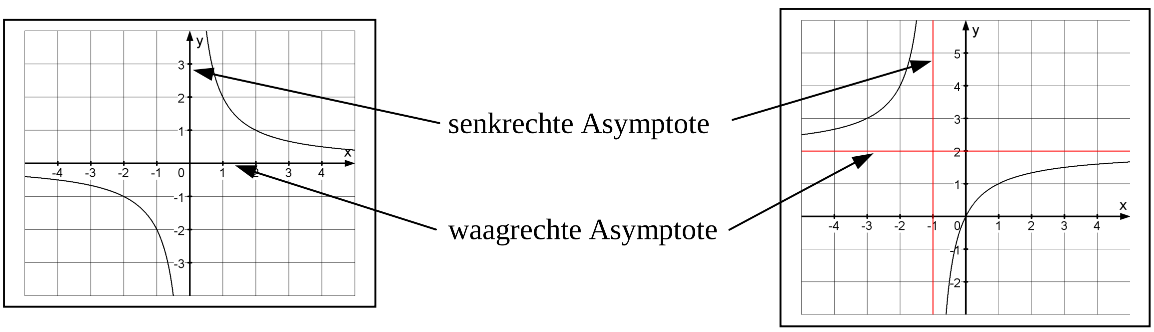
Somit ist die Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B: g: $y = -\frac{3}{5}x + 2\frac{4}{5}$

2.8 Gebrochen-rationale Funktionen

Die Funktionsterme gebrochen-rationaler Funktionen enthalten auch im Nenner die Variable x.

Die Definitionsmenge D enthält diejenigen Elemente der Grundmenge, für die der Nenner ungleich Null ist. Die Nullstellen des Nenners nennt man **Definitionslücken**.

Beispiele: $f(x) = \frac{2}{x}$, $D_g = \mathbb{Q} \setminus \{-0\}$ $g(x) = \frac{2x}{x+1}$, $D_g = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$



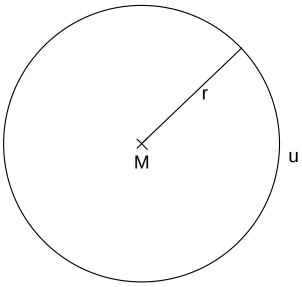
3 Geometrie

3.1 Der Kreis

Der Kreis mit Radius r besitzt den Umfang $\boxed{u = 2r\pi}$

und den Flächeninhalt $\boxed{A = r^2\pi}$

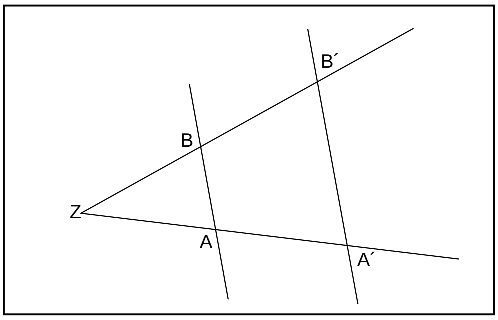
Kreiszahl $\pi \approx 3{,}14$

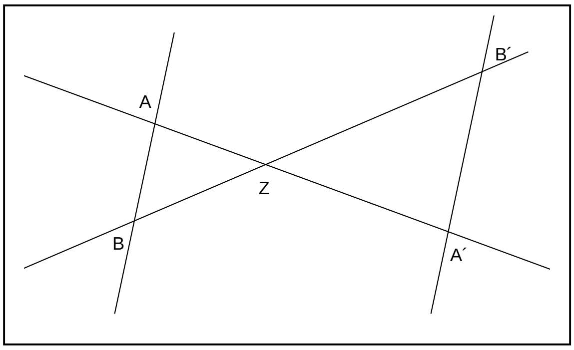


3.2 Der Strahlensatz

<u>Voraussetzung:</u>

Zwei sich schneidende Geraden werden von zueinander parallelen Geraden geschnitten.





Strahlensätze:
Wenn AB || A'B' dann gilt:

$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$

$\overline{A'A} : \overline{ZA} = \overline{B'B} : \overline{ZB}$

Je zwei Abschnitte auf einer Geraden verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.

$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{A'B'} : \overline{AB}$

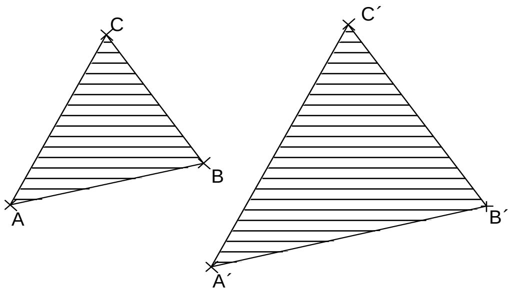
Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von Z aus gemessenen Abschnitte auf einer der Geraden.

3.3 Ähnlichkeit

Wird eine Originalfigur im Maßstab k ($k \in \mathbb{Q}^+$, $k \neq 1$) vergrößert bzw. verkleinert, so heißen Bildfigur und Originalfigur zueinander **ähnlich**.

Die Zahl k nennt man **Ähnlichkeitsfaktor.**

Beispiel: Δ ABC ~ Δ A´B´C´.



Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

- WW-Satz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.
- S:S:S-Satz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen.
- S:W:S-Satz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
- S:s:W-Satz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

Umkehrung: Sind zwei Dreiecke ähnlich, so stimmen sie in den Winkeln überein und die Verhältnisse entsprechender Seiten sind gleich.

4 Stochastik

4.1 Der Ergebnisraum

Ein Experiment, dessen Ausgang vom Zufall abhängig ist, nennt man **Zufallsexperiment**. Ein Ausgang des Experiments heißt Ergebnis. Werden alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments zu einer Menge zusammengefasst, so erhält man den **Ergebnisraum** Ω.

Beispiele:

1. *Einmaliges Werfen eines Würfels:* $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
2. *Zweimaliges Werfen eines Münze:* $\Omega = \{WW; WZ; ZW; ZZ\}$

4.2 Das Ereignis

Jede Teilmenge A des Ergebnisraumes Ω nennt man **Ereignis**.

Ein **Ereignis E tritt ein**, wenn bei einer Durchführung des Zufallsexperiments ein Ergebnis aus E auftritt. Das **Gegenereignis** $\overline{E}$ enthält alle Ergebnisse, die in E nicht enthalten sind.

Beispiel:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
E_1 „Augenzahl gerade“: $E_1 = \{2; 4; 6\}$
E_2 „Augenzahl durch 3 teilbar”: $E_2 = \{3; 6\}$
Gegenereignis zu E_1: $\overline{E_1} = \{1; 3; 5\}$

Sonderfälle:

Ω heißt auch das **sichere Ereignis**.

{} heißt auch das **unmögliche Ereignis**.

Ereignisse mit einem Element heißen **Elementarereignisse**.

4.3 Laplace-Wahrscheinlichkeit

Zufallsexperimente, bei denen jedes mögliche Elementarereignis mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintritt, heißen **Laplace-Experimente**.

Die Wahrscheinlichkeit P(E) für ein Ereignis E berechnet man folgendermaßen:

$$\boxed{P(E) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } E}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega}}$$

Beispiel: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $E = \{1; 2\}$

$$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$