Ebene im IR^3

- Parameterform: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
- Normalenform in Vektordarstellung: $\vec{n} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$
- Normalenform in Koordinatendarstellung: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$

Kugelgleichung

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

Die Merkhilfe steht unter www.isb.bayern.de → *Gymnasium* → *Fächer* → *Mathematik* zum Download bereit.

Merkhilfe

Mathematik am Gymnasium

1 Inhalte der Mittelstufe

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Potenzen

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ $\quad \left(a^r\right)^s = a^{rs}$

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\quad a^r \cdot b^r = (ab)^r$ $\quad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

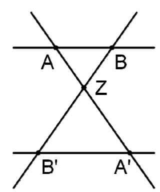
Logarithmen

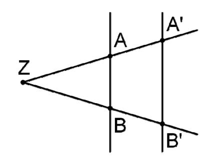
$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ $\quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ $\quad \log_a b^r = r \cdot \log_a b$

Strahlensätze

Ist $AB \parallel A'B'$, so gilt:

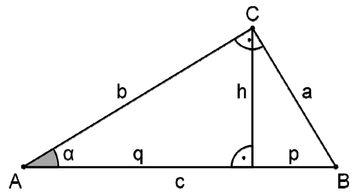
- $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$, $\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$
- $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$





Rechtwinkliges Dreieck

- Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
- Höhensatz: $h^2 = pq$
- Kathetensatz: $a^2 = cp$, $b^2 = cq$
- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$



Allgemeines Dreieck

- Sinussatz: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$
- Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Sinus und Kosinus

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ $\quad$ $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ $\quad$ $(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$

$\sin(90° - \varphi) = \cos\varphi$ $\quad$ $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$

Figurengeometrie

- Trapez: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$
- Kreis: $U = 2r\pi$, $A = r^2\pi$

Raumgeometrie

- Prisma: $V = Gh$
- Pyramide: $V = \frac{1}{3}Gh$
- gerader Kreiszylinder: $V = r^2\pi h$, $M = 2r\pi h$
- gerader Kreiskegel: $V = \frac{1}{3}r^2\pi h$, $M = r\pi m$
- Kugel: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$, $O = 4r^2\pi$

4 Geometrie

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Definition: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Einheitsvektor: $\vec{a}^{\,0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ $\quad (0 \le \varphi \le \pi)$

Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Definition: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$
- Richtung: $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- Betrag: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ $\quad (0 \le \varphi \le \pi)$
- Flächeninhalt eines Dreiecks ABC: $F = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$
- Volumen einer dreiseitigen Pyramide ABCD: $V = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \circ \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right)\right|$

Mittelpunkt einer Strecke [AB]

$\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{A} + \vec{B}\right)$

Schwerpunkt eines Dreiecks ABC

$\vec{S} = \frac{1}{3} \cdot \left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Unabhängigkeit zweier Ereignisse

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zufallsgrößen – Binomialverteilung

Eine Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an. Dann gilt:

- Erwartungswert: $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$
- Varianz: $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$
- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Ist eine Zufallsgröße X binomialverteilt nach $B(n;p)$, so gilt:

- $P(X = k) = B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
- Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p$
- Varianz: $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Signifikanztest

- Fehler 1. Art: H_0 wird irrtümlich abgelehnt
- Fehler 2. Art: H_0 wird irrtümlich nicht abgelehnt

Als Signifikanzniveau bezeichnet man den Wert, den die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nicht überschreiten darf.

2 Analysis

Grenzwerte

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^r \cdot \ln x\right) = 0$ (jeweils $r > 0$)

Ableitung

- Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate): $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (falls der Grenzwert existiert und endlich ist)
- Schreibweisen: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx} = y'$

Ableitungen der Grundfunktionen

$\left(x^r\right)' = r \cdot x^{r-1}$ $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

$\left(e^x\right)' = e^x$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Ableitungsregeln

- Summenregel: $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$
- Faktorregel: $f(x) = a \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot u'(x)$
- Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
- Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$
- Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Anwendungen der Differentialrechnung

- Tangentensteigung: $m_T = f'(x_0)$
- Normalensteigung: $m_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$
- Monotonie

  $f'(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f fällt streng monoton in I

  $f'(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f steigt streng monoton in I
- Extrempunkte

  Ist $f'(x_0) = 0$ und wechselt f' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Extrempunkt.
- Krümmung

  $f''(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f ist in I rechtsgekrümmt

  $f''(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f ist in I linksgekrümmt
- Wendepunkte

  Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.
- Newton'sche Iterationsformel: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion f ist eine Stammfunktion von f.

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow I'(x) = f(x)$$

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b \quad \text{(F ist eine Stammfunktion von f)}$$

Unbestimmte Integrale

$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$ $\qquad$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\qquad$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int e^x dx = e^x + C$ $\qquad$ $\int \ln x\,dx = -x + x \cdot \ln x + C$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ $\qquad$ $\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$

$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$ (F ist eine Stammfunktion von f)

3 Stochastik

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden.

Urnenmodell

- Ziehen ohne Zurücklegen

  Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen K schwarz sind, werden n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

  $$P(\text{„genau k schwarze Kugeln“}) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
- Ziehen mit Zurücklegen

  Aus einer Urne, in der der Anteil schwarzer Kugeln p ist, werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

  $$P(\text{„genau k schwarze Kugeln“}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$