Merkhilfe Mathematik

Die nachfolgenden Ausführungen stellen keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Insbesondere werden die verwendeten Bezeichnungen nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

Teil I: Stoffgebiete der Mittelstufe

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Lösungsformel für $ax^2 + bx + c = 0$: $\quad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Potenzen

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\qquad \left(a^x\right)^z = a^{xz}$

$a^x \cdot a^z = a^{x+z}$ $\qquad \frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$ $\qquad a^x \cdot b^x = (ab)^x$ $\qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Logarithmen

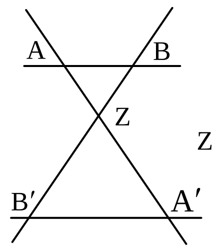
$\log_b(uv) = \log_b u + \log_b v$ $\qquad \log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$

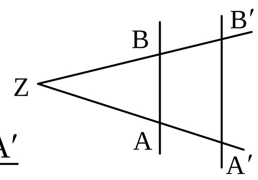
$\log_b u^z = z \cdot \log_b u$ $\qquad \log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$

Strahlensätze

$AB \parallel A'B' \Leftrightarrow \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}; \; \frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$

$AB \parallel A'B' \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}}$





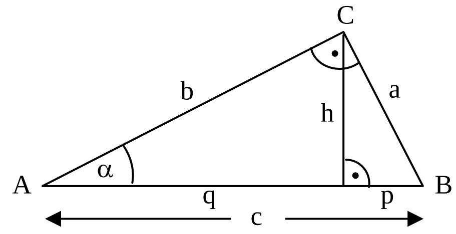
Rechtwinkliges Dreieck

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = pq$

Kathetensatz: $a^2 = cp; \; b^2 = cq$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$



Allgemeines Dreieck

Sinussatz: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Sinus und Kosinus

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ $\qquad \cos(-\varphi) = \cos\varphi$ $\qquad (\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$

$\sin(90° - \varphi) = \cos\varphi$ $\qquad \cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$

Figurengeometrie

Gleichseitiges Dreieck: $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ $\qquad$ Trapez: $A = \frac{a+c}{2}h$

Kreis: $U = 2r\pi; \; A = r^2\pi$

Raumgeometrie

Prisma: $V = Gh$ $\qquad$ gerader Kreiszylinder: $V = r^2\pi h; \quad M = 2r\pi h$

Pyramide: $V = \frac{1}{3}Gh$ $\qquad$ gerader Kreiskegel: $V = \frac{1}{3}r^2\pi h; \quad M = r\pi m$

Kugel: $V = \frac{4}{3}r^3\pi; \quad O = 4r^2\pi$

Teil II: Analysis

Grenzwerte

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} x^r \ln x = 0$ (jeweils $r > 0$)

Für kleine x gilt: $\sin x \approx \tan x \approx x$

Definition der Ableitung

Ableitung: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

falls der Grenzwert existiert und endlich ist.

Schreibweisen: $f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx} = y'$

Ableitung der Grundfunktionen

$(x^r)' = r\,x^{r-1}$ $(r \in \mathbb{R})$; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$

$(e^x)' = e^x$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Ableitungsregeln

Summenregel: $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Faktorregel: $f(x) = c \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Anwendungen der Differentialrechnung

- Tangentensteigung: $m_T = f'(x_0)$; Normalensteigung: $m_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$
- Monotoniekriterium:
  $f'(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ f fällt streng monoton in I.
  $f'(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ f steigt streng monoton in I.
- Art von Extremwerten (mit Hilfe der zweiten Ableitung):
  $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ f hat an der Stelle x_0 ein relatives Minimum.
  $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ f hat an der Stelle x_0 ein relatives Maximum.
- Graphenkrümmung:
  $f''(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f ist in I rechtsgekrümmt.
  $f''(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f ist in I linksgekrümmt.
- Wendepunkt:
  Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen,
  so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.
- Newtonsche Iterationsformel zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen:
  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion f ist eine Stammfunktion von f.

$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow I'(x) = f(x)$

Berechnung bestimmter Integrale

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$, wobei F eine beliebige Stammfunktion zu f ist.

Wichtige unbestimmte Integrale

$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$ $\qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int e^x dx = e^x + C$ $\qquad \int \ln x\,dx = -x + x\ln x + C$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ $\qquad \int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$

$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, wobei F Stammfunktion von f ist.

Teil III: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$

Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge mit n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen zu bilden.

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Unabhängigkeit von zwei Ereignissen: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Urnenmodell

- Ziehen ohne Zurücklegen:
  Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen K schwarz sind, werden n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
  P(„genau k schwarze Kugeln“) = $\frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- Ziehen mit Zurücklegen:
  Aus einer Urne, in der der Anteil schwarzer Kugeln p ist, werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
  P(„genau k schwarze Kugeln“) = $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Zufallsgrößen – Binomialverteilung

Die Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an. Dann gilt:

- Erwartungswert:
  $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$
- Varianz:
  $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$
- Standardabweichung:
  $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Ist die Zufallsgröße X binomial verteilt nach B(n; p), so gilt:

$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für k = 0, 1, ..., n

mit Erwartungswert $E(X) = n \cdot p$ und Varianz $\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Teil IV: Analytische Geometrie

Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Eigenschaften und Anwendungen des Skalarproduktes

- zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $0 \le \varphi \le \pi$

Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Eigenschaften und Anwendungen des Vektorproduktes

- $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ mit $0 \le \varphi \le \pi$
- Flächeninhalt F des Dreiecks ABC: $F = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$
- Volumen V der dreiseitigen Pyramide ABCD: $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \circ \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right) \right|$

Mittelpunkt M der Strecke [AB]: $\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$

Schwerpunkt S des Dreiecks ABC: $\vec{S} = \frac{1}{3}\left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right)$

Ebene im $\mathbb{R}^3$

- Parameterform von E: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$
- Normalenform von E in Vektordarstellung: $\vec{n} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$
- Normalenform von E in Koordinatendarstellung: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0$
- Abstand e des Punktes $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ von E: $e = \frac{|n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_0|}{|\vec{n}|}$

Kugelgleichung

$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$