

1 Zahlen und Funktionen

1.1 Terme und Variable

Buchstaben, die als Platzhalter für eine Zahl stehen, heißen **Variable**.

Terme sind Rechenausdrücke, die aus Zahlen, Variablen, Rechenzeichen und Klammern bestehen.

Wenn man die Variablen in einem Term mit Zahlen belegt, erhält man den Wert des Terms:

$$T(x) = x^2 - 3x \qquad T(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$$

Umformungen, die den Wert des Terms nicht verändern, heißen **Äquivalenzumformungen**.

Termumformungen nach den Rechengesetzen (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz) und nach den Klammerregeln ergeben äquivalente Terme.

Bei einer Summe mit Produkten werden zunächst die einzelnen Produkte vereinfacht. Dann werden die Summanden, in denen die gleichen Variablen mit jeweils derselben Potenz vorkommen, zusammengefasst:

$$3x^2 + 7y^3 - (5x)^2 + 4y \cdot (-y) = 3x^2 + 7y^3 - 25x^2 - 4y^2 = -22x^2 + 7y^3 - 4y^2$$

1.2 Klammerrechnung

Auflösen von Klammern (Ausmultiplizieren)

Eine „Plusklammer“ kann einfach weggelassen werden:

$$3a + (4b - 5a) = 3a + 4b - 5a = -2a + 4b$$

Bei einer „Minusklammer“ müssen alle Zeichen in der Klammer geändert werden:

$$5a - (8a - b) - (-4a + 4b) = 5a - 8a + b + 4a - 4b = a - 3b$$

Anwendung des Distributivgesetzes:

$$3x + 4(3x - y) - 5(-y + 2x) = 3x + 12x - 4y + 5y - 10x = 5x + y$$

Zwei Summen werden multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert und die Produkte addiert.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(2x + 3y) \cdot (-3 + 4y) = -6x + 8xy - 9y + 12y^2 \quad (\text{Vorzeichen beachten!})$$

Faktorisieren von Summen (Ausklammern)

Durch geschicktes Ausklammern kann man bestimmte Summen in Produkte verwandeln.

$$6a - 2ab = 2a \cdot (3 - b)$$

$$ex - e + 3xy - 3y = e(x - 1) + 3y(x - 1) = (x - 1) \cdot (e + 3y)$$

1.3 Aufstellen von Termen

Viele Sachverhalte kann man kurz und genau durch Terme darstellen. Dazu legt man zuerst die Variable fest und ermittelt dann den Term, der den Sachverhalt beschreibt.

Beispiel:

Aus einem x cm langen Draht soll das Kantenmodell eines Würfels hergestellt werden. Bestimme einen Term für den Oberflächeninhalt $O(x)$ des Würfels.

Seite des Würfels in cm: $x : 12$

Oberflächeninhalt in cm^2 : $O(x) = 6 \cdot (x : 12)^2$

1.4 Lineare Gleichungen

Eine Gleichung, in der die Variable x nur in der ersten Potenz vorkommt, heißt **lineare Gleichung**. Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man **auf beiden Seiten** die selbe Zahl oder den selben Term addiert (subtrahiert) oder beide Seiten mit der gleichen Zahl $\neq 0$ multipliziert (dividiert).

$$5 - 0,5x = 3 + 0,75x \quad | +0,5x - 3$$

$$2 = 1,25x \quad | : 1,25$$

$$1,6 = x$$

$$L = \{1,6\} \quad \text{falls } G = \mathbb{Q}$$

$$L = \{ \} \quad \text{falls } G = \mathbb{N}$$

Eine lineare Gleichung hat entweder genau eine Zahl, keine Zahl oder alle Zahlen der Grundmenge G als Lösung.

1.5 Vertiefen der Prozentrechnung

Wiederholung

$$p\% \cdot G = P$$

bzw.

$$\frac{P}{G} = p\%$$

$p\%$ = **Prozentsatz**, G = **Grundwert**, P = **Prozentwert**

Erhöhung des Grundwertes

Wird der Grundwert (z.B. ein Preis) um $p\%$ erhöht, so steigt er auf das $(1 + \frac{p}{100})$ -fache des ursprünglichen Wertes. $1 + \frac{p}{100}$ heißt **Wachstumsfaktor**.

Beispiel:

Der Preis eines Fahrrades wurde um 8% erhöht und beträgt nun 378 €.

Wie teuer war das Fahrrad vorher?

$$G_{alt} = \frac{G_{neu}}{1 + \frac{8}{100}} = \frac{378 \text{ €}}{1,08} = 350 \text{ €}$$

Man kann die Aufgabe auch durch Schlussrechnung (Dreisatz) lösen.

Verminderung des Grundwertes

Wird der Grundwert (z.B. ein Preis) um $p\%$ vermindert, so nimmt er auf das $(1 - \frac{p}{100})$ -fache des ursprünglichen Wertes ab. $1 - \frac{p}{100}$ heißt **Abnahmefaktor**.

Beispiel:

Der Preis eines Fernsehgerätes wurde um 15% gesenkt und beträgt nun 357 €. Wie teuer war das Gerät vorher?

$$G_{alt} = \frac{G_{neu}}{1 - \frac{15}{100}} = \frac{357 \text{ €}}{0,85} = 420 \text{ €}$$

Man kann die Aufgabe auch durch Schlussrechnung (Dreisatz) lösen (vgl. Grundwissen 6. Klasse).

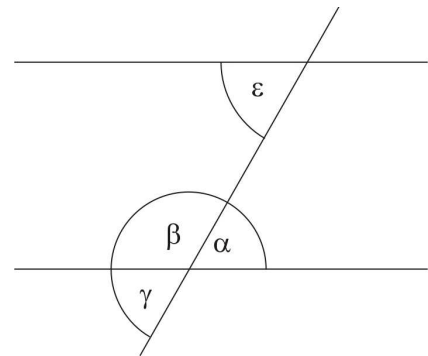
2 Geometrie

2.1 Winkel

α und γ heißen Scheitelwinkel.
 α und β heißen Nebenwinkel.

Scheitelwinkel sind gleich groß.
 Nebenwinkel ergeben zusammen 180° .

γ und ε heißen Stufenwinkel (F-Winkel).
 α und ε heißen Wechselwinkel (Z-Winkel).
 β und ε heißen Nachbarwinkel (E-Winkel).



Stufenwinkel und Wechselwinkel sind genau dann gleich groß, wenn die Geraden g und h parallel sind. Nachbarwinkel ergänzen sich genau dann zu 180° , wenn g und h parallel sind.

Die Summe der (Innen-)Winkel ergibt in jedem Dreieck 180° , in jedem Viereck 360° .

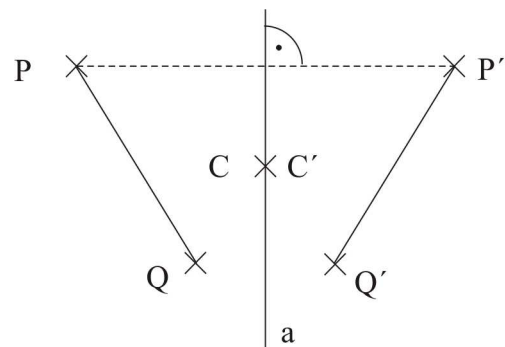
2.2 Spiegelungen

Achsen Spiegelung an der Achse a

Bei gegebener Achse a wird jedem Punkt P durch folgende Vorschrift ein Bildpunkt P' zugeordnet:

- Falls $P \notin a$, wird die Strecke $[PP']$ von a rechtwinklig halbiert.
- Falls $P \in a$, gilt $P = P'$

Alle Achsenpunkte sind Fixpunkte, alle zur Achse senkrechten Geraden sind Fixgeraden.



Eine Figur, die bei einer Achsen Spiegelung auf sich selbst abgebildet wird, heißt **achsensymmetrisch**.

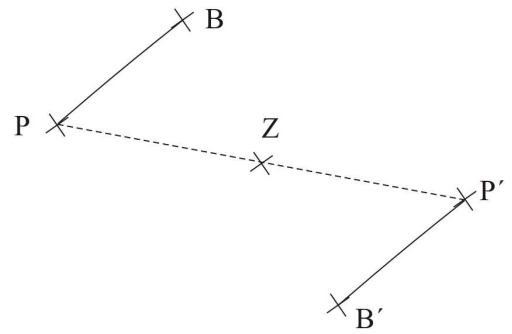
Achsen Spiegelungen sind geraden-, längen- und winkeltreu. Der Umlaufsinn ändert sich.

Punktspiegelung am Punkt Z

Bei gegebenem Zentrum Z wird jedem Punkt P durch folgende Vorschrift ein Bildpunkt P' zugeordnet:

- Für $P \neq Z$ liegt P' so, dass $P' \in PZ$ und $\overline{PZ} = \overline{P'Z}$
- Für $P = Z$ ist $P' = Z$ (Fixpunkt).

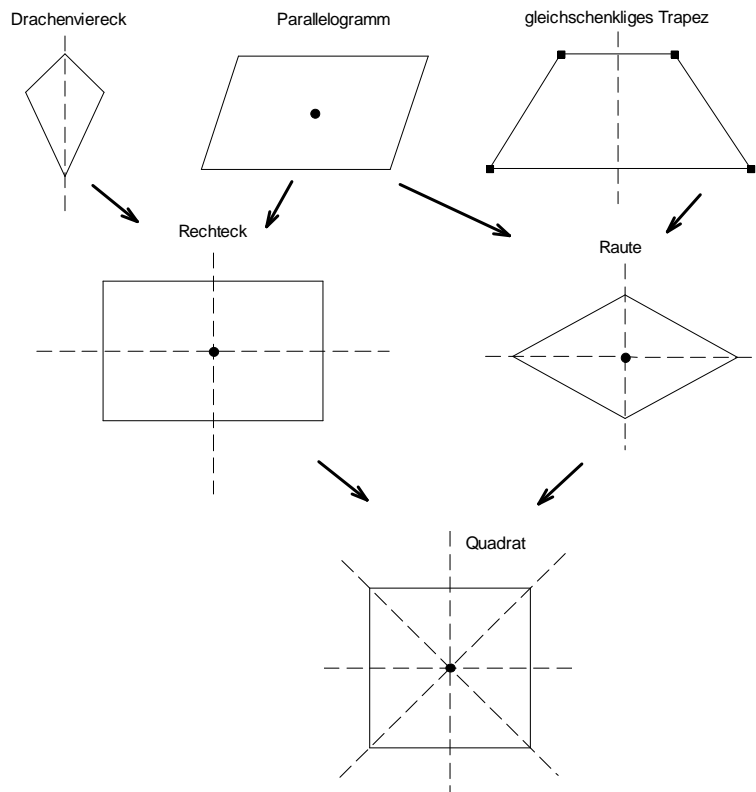
Nur Z ist Fixpunkt, alle durch Z gehenden Geraden sind Fixgeraden.



Eine Figur, die bei einer Punktspiegelung wieder auf sich abgebildet wird, heißt **punktsymmetrisch**.

Punktspiegelungen sind geraden-, längen- und winkeltreu. Der Umlaufsinn bleibt erhalten.

2.3 Symmetrische Vierecke

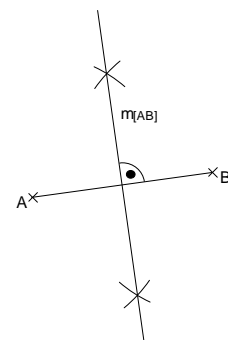


2.4 Konstruktionen

Die Mittelsenkrechte

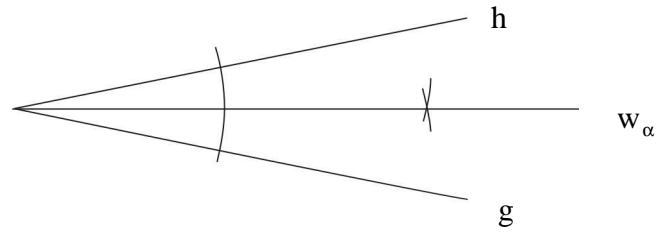
Die Symmetrieachse zu einer Strecke [AB] heißt Mittelsenkrechte $m_{[AB]}$.

Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten $m_{[AB]}$ und nur diese sind von A und B gleich weit entfernt.



Die Winkelhalbierende

Die Winkelhalbierende eines Winkels α ist die Symmetrieachse der Schenkel g und h. Alle Punkte auf der Winkelhalbierenden w_α haben von g und h den gleichen Abstand.



2.5 Kongruenz

Lassen sich zwei Figuren F und G vollständig zur Deckung bringen, so heißen sie **kongruent** und man schreibt: $F \cong G$.

Kongruenzsätze für Dreiecke

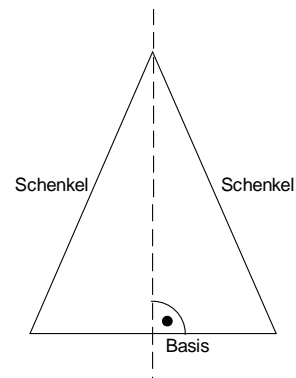
- SSS:** Dreiecke sind kongruent, wenn sie in drei Seiten übereinstimmen.
- SWS:** Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel übereinstimmen.
- WSW:** Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleich liegenden Winkeln übereinstimmen.
- SsW:** Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

2.6 Besondere Dreiecke

Das gleichschenklige Dreieck

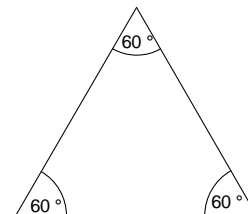
Jede der folgenden Aussagen ist gleichwertig:

- Das Dreieck ist gleichschenkelig.
- Das Dreieck hat zwei gleich lange Seiten.
- Das Dreieck ist achsensymmetrisch.
- Das Dreieck besitzt zwei gleich große Winkel.



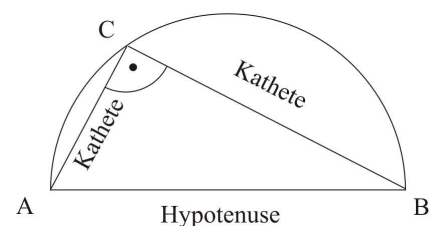
Das gleichseitige Dreieck

Ein gleichseitiges Dreieck besitzt drei gleich lange Seiten. Seine Innenwinkel betragen jeweils 60° .



Das rechtwinklige Dreieck

Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn C auf dem Halbkreis über [AB] liegt (Thaleskreis). Die beiden Katheten stehen aufeinander senkrecht. Die Hypotenuse liegt dem 90° -Winkel gegenüber.

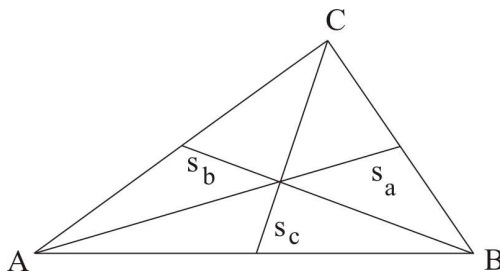
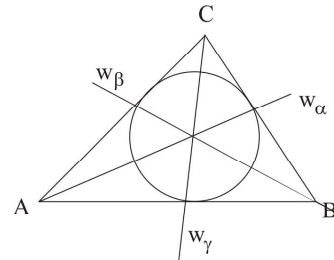


2.7 Besondere Linien und Punkte im Dreieck

Besondere Linien im Dreieck sind die **Winkelhalbierenden**, die **Seitenhalbierenden**, die **Mittelsenkrechten** und die **Höhen**.

Die Winkelhalbierenden w_α, w_β und w_γ halbieren jeweils einen Innenwinkel des Dreiecks.

Sie schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Inkreises.

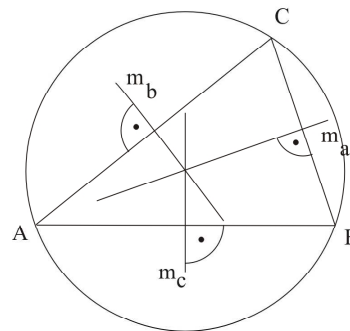


Die Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c verbinden jeweils eine Ecke des Dreiecks mit dem Mittelpunkt der Gegenseite.

Sie schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Dreiecks.

Die Mittelsenkrechten m_a, m_b und m_c sind Lote im Mittelpunkt der Dreiecksseiten.

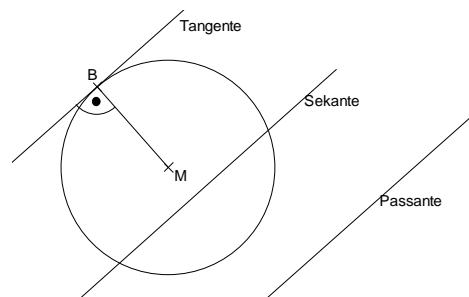
Sie schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Umkreises.



Die Höhen sind Lote von einer Ecke des Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite.

2.8 Kreistangenten

Eine Gerade heißt Tangente an einen Kreis, wenn sie mit dem Kreis genau einen Punkt B gemeinsam hat. Dieser Punkt heißt dann Berührungspunkt.



Die Kreistangente steht senkrecht auf dem Radius [MB].

3 Stochastik

Das arithmetische Mittel (den Durchschnittswert) von Daten erhält man, indem man die Summe der Einzelwerte durch ihre Anzahl dividiert:

$$\text{Arithmetisches Mittel} = \frac{\text{Summe der Einzelwerte}}{\text{Anzahl der Einzelwerte}}$$

Beispiel: Notenverteilung bei einer Schulaufgabe

<i>Note</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>
<i>Anzahl</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>3</i>	<i>1</i>

$$\text{Arithmetisches Mittel} = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{25} = 3,2$$

Die Darstellung von Daten in Diagrammen findest du im Grundwissen der 5. und 6. Klasse.