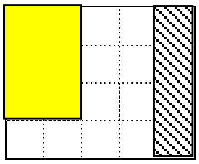
1 Zahlen

1.1 Bruchteile und Bruchzahlen

Bruchteile von Ganzen lassen sich mit Hilfe von **Bruchzahlen** darstellen:



Gelb: $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ Schraffiert: $\frac{1}{5}$

Bruchteile gibt man häufig in **Prozent** (%) an.

Prozent = Hundertstel z.B. $3\% = \frac{3}{100}$

Brüche haben die Form $\frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$;

z heißt **Zähler**, n heißt **Nenner** des Bruches.

Es gilt: $\boxed{\frac{z}{n} = z : n}$

Einteilung der Brüche:	Stammbrüche	$z = 1$
	echte Brüche	$z < n$
	unechte Brüche	$z > n$

Unechte Brüche lassen sich in **gemischte Zahlen** verwandeln. *Beispiel:* $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

Die Menge der positiven und negativen Bruchzahlen bildet zusammen mit der Zahl 0 die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

1.2 Formänderung von Brüchen

Erweitern eines Bruches bedeutet, Zähler und Nenner werden mit der selben natürlichen Zahl k multipliziert: $\frac{z}{n} = \frac{z \cdot k}{n \cdot k}$, $k \in \mathbb{N}$

Kürzen eines Bruches bedeutet, Zähler und Nenner werden durch einen gemeinsamen Teiler k dividiert: $\frac{z}{n} = \frac{z : k}{n : k}$, $k \in \mathbb{N}$

Einen Bruch, den man nicht mehr kürzen kann, nennt man **vollständig gekürzt (Grundform).**

1.3 Anordnung von Brüchen

Von zwei Brüchen mit gleichem Nenner ist derjenige kleiner, der den kleineren Zähler hat. *Beispiel*: $\frac{3}{11} < \frac{5}{11} < \frac{10}{11}$

Brüche mit verschiedenen Nennern bringt man vor dem Vergleichen auf den **Hauptnenner** (= kleinster gemeinsamer Nenner).

1.4 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Brüche mit gleichem Nenner werden addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert und den Nenner beibehält.

Beispiele: $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$; $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

Brüche mit verschiedenen Nennern erweitert man zunächst auf den **Hauptnenner**.

Beispiel: $\frac{1}{6}+\frac{1}{4} = \frac{2}{12}+\frac{3}{12} = \frac{5}{12}$

1.5 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man zuerst soweit wie möglich kürzt, und dann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Beispiel: $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{20} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$

Für die Division zweier Brüche gilt:

Bruch : Bruch = Bruch · Kehrbruch

$$\frac{z_1}{n_1} : \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot z_2}$$

Beispiel: $\frac{9}{10} : \frac{6}{25} = \frac{9 \cdot 25}{10 \cdot 6} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

Gemischte Zahlen müssen vor dem Multiplizieren und vor dem Dividieren in unechte Brüche verwandelt werden.

1.6 Bruchteil eines Bruches

Das Wort „von“ wird nach einem Bruch durch „·“ ersetzt.

Beispiel: $\frac{3}{4}$ *von* $\frac{2}{5}\,kg = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}\,kg = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 5}\,kg = \frac{3}{10}\,kg$

1.7 Dezimalzahlen

Zahlen wie z.B. 2,531 heißen **Dezimalzahlen**. Dabei bedeutet die 1. (2. , 3. ,...) Stelle hinter dem Komma Zehntel (Hundertstel, Tausendstel, ...).

Die Ziffern hinter dem Komma heißen Dezimalen.

Beispiele: $0{,}07 = \frac{7}{100}$; $2{,}531 = 2\frac{531}{1000}$

1.8 Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen

Addition und Subtraktion der Stellen gleichen Wertes.

Beispiel: $4{,}72 + 3{,}204 = 7{,}924$

1.9 Multiplikation und Division mit Stufenzahlen

Man verschiebt das Komma um so viele Stellen nach rechts (links) wie die Stufenzahl (Zehnerpotenz) Nullen hat.

Beispiele: $3{,}41 \cdot 1000 = 3410$
$3{,}41 : 100 = 0{,}0341$

1.10 Multiplikation von Dezimalbrüchen

Man multipliziert zunächst ohne Berücksichtigung des Kommas. Das Ergebnis erhält so viele Dezimalen, wie die Faktoren zusammen haben.

Beispiel: $2{,}74 \cdot 3{,}2 = 8{,}768$

NR:
$$\begin{array}{r} \underline{274 \cdot 32} \\ 822 \\ \underline{548} \\ 8768 \end{array}$$

1.11 Division durch eine natürliche Zahl

Man dividiert wie bei natürlichen Zahlen. Vor dem Herunterholen der 1.Ziffer nach dem Komma wird auch im Ergebnis das Komma gesetzt.

Beispiel: $14{,}36 : 8 = 1{,}795$

1.12 Division durch einen Dezimalbruch

Zunächst wird das Komma im Dividenden und im Divisor um **gleich viele Stellen** nach rechts verschoben, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist. Dann verfährt man wie bei 1.11.

Beispiel: $14{,}36 : 0{,}8 = 143{,}6 : 8 = 17{,}95$

1.13 Umformen gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche

Die Division $\frac{z}{n} = z : n$ ergibt

- einen **endlichen** Dezimalbruch, wenn der Nenner des vollständig gekürzten Bruches nur die Primfaktoren 2 oder 5 (oder beide) enthält.
- einen **unendlichen periodischen** Dezimalbruch sonst.

Sonderfall: Der Nenner enthält nur Neunerziffern.

Beispiele: $\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$; $2\frac{7}{99} = 2{,}\overline{07}$

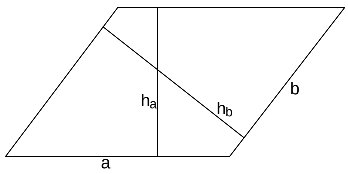
1.14 Rechnen mit rationalen Zahlen

Die Rechengesetze für die ganzen Zahlen gelten auch für die rationalen Zahlen.

2 Geometrie

2.1 Flächeninhalte

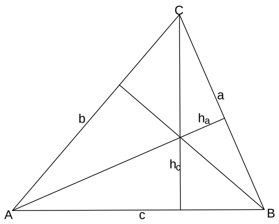
Parallelogramm:



$A_P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

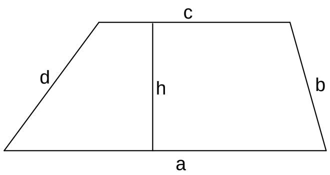
A_P = Grundlinie mal (zugehörige) Höhe

Dreieck:



$$A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

Trapez:



$$A_T = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

2.2 Volumenberechnung

Volumen eines **Quaders** mit den Kantenlängen a, b, c: $V = a \cdot b \cdot c$

Volumen eines **Würfels** mit der Kantenlänge a: $V = a \cdot a \cdot a = a^3$

Volumeneinheiten:

Kantenlänge des Würfels	Volumen des Würfels
1 mm	1 mm^3
1 cm	1 cm^3
1 dm	1 dm^3
1 m	1 m^3

1 dm^3 = 1 Liter

Die Umrechnungszahl ist jeweils 1000.

3 Funktionen

Bei einer Zuordnung wird jeder Zahl oder Größe eine weitere Zahl oder Größe zugeordnet.

Beispiel: Monat $\mapsto$ *Temperatur*.

Beschreibungsmöglichkeiten: Tabelle, Graph, Zuordnungsvorschrift

3.1 Direkte Proportionalität

Bei einer direkten Proportionalität wird dem doppelten, dreifachen, vierfachen ... Wert der einen Größe der doppelte, dreifache, vierfache ... Wert der anderen Größe zugeordnet.

Beispiel: Menge → Preis

Dreisatz (Schlussrechnung)

Beispiel: *6 kg Äpfel kosten 4,50 €. Wie viel kosten 15 kg?*

1. $6\ kg \mathrel{\hat{=}} 4{,}50\ €$
2. $1\ kg \mathrel{\hat{=}} 4{,}50\ € : 6 = 0{,}75\ €$
3. $15\ kg \mathrel{\hat{=}} 0{,}75\ € \cdot 15 = 11{,}25\ €$

3.2 Prozentrechung

Es gilt: $\boxed{p\ \%\ \text{von}\ G = P}$

p % = **Prozentsatz**, G = **Grundwert**, P = **Prozentwert**

<u>Berechnung des Prozentsatzes:</u>

Beispiel: *Wie viel Prozent sind 40 € von 320 €?*

$$\frac{40\,€}{320\,€} = 0{,}125 = 12{,}5\%$$

<u>Berechnung des Prozentwertes</u>

Beispiel: *Der Preis eines Fernsehgerätes beträgt 325 €. Er wird um 12% gesenkt. Wie hoch ist der Preisnachlass?*

12% von 325 € = 0,12 · 325 € = 39 €

<u>Berechnung des Grundwertes</u>

Beispiel: *Der Preis eines Fernsehgerätes wurde um 15% gesenkt und beträgt nun 357 €. Wie teuer war das Gerät vorher? (Lösung mit **Dreisatz**)*

1. $85\% \mathrel{\hat{=}} 357\ €$
2. $1\% \mathrel{\hat{=}} 375\ € : 85 = 4{,}20\ €$
3. $100\% \mathrel{\hat{=}} 4{,}20\ € \cdot 100 = 420\ €$

Auch die Berechnung des Prozentsatzes und des Prozentwertes kann man mit Dreisatz lösen. Bei allen Prozentrechnungen handelt es sich um eine direkte Proportionalität. Dem Grundwert werden immer 100% zugeordnet.

4 Stochastik

4.1 Zufallsexperimente

Experimente, die unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar sind und deren Ergebnis zufällig, also nicht vorhersagbar ist, nenn man **Zufallsexperimente**.

Beispiele: *Werfen eines Spielwürfels, einer Münze; Drehen eines Glückrades*

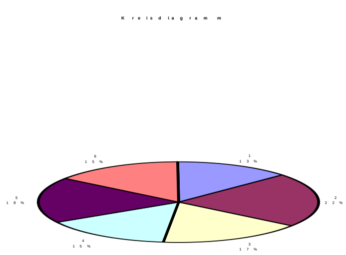
4.2 Relative Häufigkeit

Beispiel: *Wirft man einen Spielwürfel 60 mal und tritt dabei die Augenzahl zwei13 mal auf, so sagt man die* ***absolute Häufigkeit*** *der „Augenzahl zwei“ ist 13 und die* ***relative Häufigkeit*** *ist* $\frac{13}{60}$.

$$\boxed{\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}}$$

Die Auswertung von Zufallsexperimenten erfolgt häufig in Tabellen oder Diagrammen.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6	Summe
absolute Häufigkeit	8	13	10	9	11	9	60
relative Häufigkeit	$\frac{8}{60} \approx 13\%$	$\frac{13}{60} \approx 22\%$	$\frac{10}{60} \approx 17\%$	$\frac{9}{60} = 15\%$	$\frac{11}{60} \approx 18\%$	$\frac{9}{60} = 15\%$	$\frac{60}{60} = 100\%$
Winkel im Diagramm	48°	78°	60°	54°	66°	54°	360°



Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Wiederholt man ein Zufallsexperiment sehr oft, so pendelt sich die relative Häufigkeit bei einem festen Zahlenwert ein.

Beispiel: *Beim Werfen eines Spielwürfels ist dieser Wert* $\frac{1}{6}$.